Devoir Maison 4

Pour le 1 décembre 2025

Problème

(*Banque PT Maths A 2009*)

Dans tout le problème, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'identité de E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul sur E.

Partie I

1. Dans cette question, E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f

2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

   Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

3. L'espace vectoriel E est désormais muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdots \rangle$.

   La norme du vecteur $x \in E$ est notée $\|x\|$.

   Enfin, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^{\perp}$.

   On rappelle qu'un projecteur de E est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux. Soit p un projecteur de E.

   (a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors :

$$\forall u \in E, ; \qquad \|p(u)\| \leqslant \|u\| \qquad\qquad (\star).$$

   (b) Montrer que si $(\star)$ est vérifiée, alors p est un projecteur orthogonal.

Partie II

On considère ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et $A^{\top}$ la matrice transposée de A.

On définit l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^{\top} B).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \leqslant n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

3. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. On note Φ la norme associée au produit scalaire φ (i.e. $\Phi(M) = \sqrt{\varphi(M, M)}$)

   Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.

5. On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (a) Donner une base de $F^\perp$.

   (b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F.

Partie III

On considère l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \quad \psi(P, Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   (a) Calculer $\psi(1, 1)$, $\psi(1, X)$, $\psi(1, X^2)$, $\psi(X, X)$, $\psi(X, X^2)$ et $\psi(X^2, X^2)$.
   (b) On note $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ la base orthonormale de F telle que :
   $$\forall k \in \{0, 1, 2\} \quad \text{Vect}(P_0, .., P_k) = \text{Vect}(1, .., X^k) \quad \text{et} \quad \psi(P_k, X^k) > 0.$$
   Déterminer explicitement les polynômes P_0, P_1 et P_2.
3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$.
   On considère l'ensemble des sommes $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} (x_i - P(i))^2, P \in F \right\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme R et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
   $$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad R(i) = x_i$$
   (b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.
   (c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.

Corrigé

Corrigé du problème

Partie I

1. (a) On a
$$M^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = M$$

Ainsi $f \circ f = f$. $\boxed{f \text{ est donc un projecteur.}}$

De plus
$$\text{Rang}(f) = \text{Rang}(M) = \text{Rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Ainsi $\boxed{\text{Rang}(f) = 1.}$

(b) On sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$. Or $f(e_1) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 = -f(e_2)$, donc
$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1)) = \text{Vect}(e_1 - 2e_2)}$$

De plus $e_1 - 2e_2 \neq 0_E$, donc $(e_1 - 2e_2)$ est libre. C'est ainsi une base de $\text{Im}(f)$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $xe_1 + ye_2 \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si $x - y = 0$. Ainsi
$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2)}$$

2. Vérifions que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de E

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -6 \neq 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.
Soit M' la matrice du projecteur p sur P parallèlement à D dans la base $\mathcal{B}'$. On a
$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2, \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{3}L_3, \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Notons M la matrice de p dans $\mathcal{B}$. D'après la formule de changement de bases on a $M = PM'P^{-1}$,

Changement de bases

En général on va essayer d'éviter de se lancer dans un changement de bases explicites car les calculs peuvent être longs. Ici on n'a pas vraiment le choix ...

Finalement

$$\boxed{M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

<u>Remarque :</u>

On peut procéder un peu différemment : le calcul de P^{-1} nous assure que $e_1 = \frac{1}{6}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3)$, ainsi

$$\begin{aligned} p(e_1) &= \frac{1}{6}\left(p(\varepsilon_1) - p(\varepsilon_2) + 3p(\varepsilon_3)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(e_3 - e_1 + 6e_1 - 3e_2\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(5e_1 - 3e_2 + e_3\right) \end{aligned}$$

Puis procéder de même pour $p(e_2)$ et $p(e_3)$. En pratique on fait ici exactement les mêmes calculs que dans $PM'P^{-1}$ donc on ne gagne pas vraiment de temps.

3. (a) Soit p un projecteur orthogonal et $u \in E$.

   On sait que $u = (u - p(u)) + p(u)$ avec $u - p(u) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(u) \in \mathrm{Im}(p)$.

   p étant un projecteur orthogonal, on a $\langle u | u - p(u)\rangle = 0$.

   Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

   $$\|u\|^2 = \|u - p(u) + p(u)\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 \geqslant \|p(u)\|^2$$

   Puis, par croissance de la fonction racine carrée

   $$\boxed{\forall u \in E \qquad \|p(u)\| \leqslant \|u\|}$$

(b) Supposons que $(\star)$ est vérifiée.

Soit $u \in \mathrm{Ker}(p)$ et $v \in \mathrm{Im}(p)$. On veut monter que u et v sont orthogonaux.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $w_t = tu + v$. On a $tu \in \mathrm{Ker}(p)$, donc $p(w_t) = v$.

D'après $(\star)$, on a $\|p(w_t)\| \leqslant \|w_t\|$, ,d'où en passant au carré et en développant,

$$\|v\|^2 \leqslant \|v\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2\|u\|^2$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 2t\langle u, v\rangle + t^2\|u\|^2 \geqslant 0$$

Si $u = 0_E$ alors on a clairement $\langle u, v\rangle = 0$.

Supposons $u \neq 0_E$, en évaluant notre relation en $t = \dfrac{-\langle u, v\rangle}{\|u\|}^2$ on a

$$\frac{-2\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^4}\|u\|^2 \geqslant 0$$

C'est-à-dire $\dfrac{-\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2} \geqslant 0$. Or $\dfrac{-2\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2} \leqslant 0$, ainsi $\langle u, v\rangle = 0$

Finalement $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux, donc $\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal.}}$

Duplication

Lorsque, pour une question d'algèbre linéaire, vous avez une hypothèse du type « Pour tout u ... »et que vous cherchez à arriver à une conclusion du type « Pour tout couple (v, w) ... »pensez à appliquer votre hypothèse au couple $v + w$ ou bien aux couples $v + tw$ avec t réel.

Partie II

1. Soit $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(\lambda A+B, C) = \mathrm{Tr}((\lambda A+B)^\top C) = \mathrm{Tr}(\lambda A^\top C+B^\top C) = \lambda\mathrm{Tr}(A^\top C)+\mathrm{Tr}(B^\top C) = \lambda\varphi(A, C)+\varphi(B, C).$$

Donc φ est linéaire à gauche.

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \mathrm{Tr}\left((A^\top B)^\top\right) = \mathrm{Tr}(B^\top A) = \varphi(B, A)$$

Ainsi φ est symétrique et donc bilinéaire symétrique.

Remarquons que, si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^{n} \left(A^\top B\right)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(A^\top)_{j,i}B_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$$

En particulier

$$\varphi(A, A) = \mathrm{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} \left(A^\top A\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A^\top)_{i,j}A_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(A, A) = 0$, ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = 0$.Or une somme de carrés étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, il vient alors

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 = 0$$

Ainsi A est la matrice nulle.

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Classique

cette question est pratiquement une question de cours, il faut absolument savoir la faire.

2. Posons $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ et $B = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

On a alors

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

Et

$$\sqrt{\varphi(A,A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\varphi(B,B)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n^2} = n$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\varphi(A,B)| \leqslant \sqrt{\varphi(A,A)}\sqrt{\varphi(B,B)}$.

Cauchy-Schwarz

Si on vous demande de prouver une inégalité dans un problème faisant intervenir un produit scalaire penser à Cauchy-Schwarz doit être un réflexe, c'est bien souvent la réponse.

Ainsi

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2}}$$

3. Montrons que $\forall A \in \mathcal{A}_n$ et $\forall S \in \mathcal{S}_n$, $\varphi(A,S) = 0$.

   Dans un premier temps on a $\varphi(A,S) = \mathrm{Tr}(A^\top S) = \mathrm{Tr}(-AS)$ car A est antisymétrique

   Dans un second temps,comme S est symétrique, $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(SA)$ et φ est symétrique, on a

$$\varphi(S,A) = \mathrm{Tr}(S^\top A) = \mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}(SA) = \mathrm{Tr}(AS) = -\varphi(A,S) = \varphi(S,A)$$

   Ainsi $\varphi(A,S) = 0$.

   Finalement $\boxed{\mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{S}_n \text{ sont deux sous-espaces orthogonaux de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

4. Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $U^\top U = UU^\top = I_n$.

   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\Phi(MU) &= \sqrt{\varphi(MU, MU)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}((MU)^\top(MU))} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}((MU)(MU)^\top)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}(MUU^\top M^\top)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}(MI_nM^\top)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Tr}(M^\top M)} \\
&= \Phi(M)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\Phi(MU) = \Phi(M)}$.

5. (a) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (A_1, A_2) est une famille deux matrices non colinéaires, donc libre, et génératrice de F, c'est donc une base de F.

   Pour $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $M \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi(M, A_1) = 0$ et $\varphi(M, A_2) = 0$

   Or $\varphi(M, A_1) = \alpha - \delta$ et $\varphi(M, A_2) = \beta + \gamma$.

   Ainsi $M \in F^\perp$ si et seulement si $\delta = \alpha$ et $\gamma = -\beta$.

   On a donc

$$F^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de deux matrices non colinéaires, donc libre, et génératrice de $F^\perp$.

   Ainsi $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est donc une base de } F^\perp.}$

(b) On a $\varphi(A_1, A_2) = 0$, $\Phi(A_1) = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $\Phi(A_2) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Ainsi la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}A_1, \frac{1}{\sqrt{2}}A_2\right)$ est une base orthonormée de F.

On a donc

$$\begin{aligned}
A' &= \varphi(A, \frac{1}{\sqrt{2}}A_1)\frac{1}{\sqrt{2}}A_1 + \varphi(A, \frac{1}{\sqrt{2}}A_2)\frac{1}{\sqrt{2}}A_2 \\
&= \frac{\varphi(A, A_1)}{2}A_1 + \frac{\varphi(A, A_2)}{2}A_2 \\
&= \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$

Partie III

1. Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_3[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda P + Q, R) &= \sum_{i=0}^{3}(\lambda P + Q)(i)R(i) \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{3} P(i)R(i) + \sum_{i=0}^{3} Q(i)R(i) \\
&= \lambda\psi(P, Q) + \psi(Q, R).
\end{aligned}$$

Donc ψ est linéaire à gauche.
De plus, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\psi(Q, P) = \sum_{i=0}^{4} Q(i)P(i) = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i) = \psi(P, Q)$$

Donc ψ est symétrique, étant déjà linéaire à gauche, elle est donc bilinéaire.
Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\psi(P, P) = \sum_{i=0}^{3} P(i)^2 \geqslant 0.$$

Enfin,soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\psi(P, P) = 0$, on a alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} P(i)^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Ainsi

$$\forall i \in [\![0, 3]\!], \qquad P(i) = 0$$

P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui possède au moins 4 racines. C'est nécessairement le polynôme nul, ainsi $\psi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Finalement, $\boxed{\psi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[X].}$

2. (a) On a

$$\boxed{\psi(1, 1) = 4, \quad \psi(1, X) = 6 \quad \psi(1, X^2) = 14}$$

$$\boxed{\psi(X, X) = 14, \quad \psi(X, X^2) = 36 \quad \psi(X^2, X^2) = 98}$$

.

(b) On reconnaît que (P_0, P_1, P_2) est la base orthonormée de F obtenue à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

— $\psi(1,1) = 4$, donc $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\psi(1,1)}} = \dfrac{1}{2}$.

— On a $P_1 = \dfrac{X - \psi(X, P_0)P_0}{\psi(X - \psi(X, P_0)P_0, X - \psi(X, P_0)P_0)}$

Or $\psi(X, P_0) = \dfrac{1}{2}\psi(X, 1) = 3$. Ainsi $X - \psi(X, P_0)P_0 = X - \dfrac{3}{2}$

Puis

$$\psi\left(X - \frac{3}{2}, X - \frac{3}{2}\right) = \psi(X, X) - 2\frac{3}{2}\psi(X, 1) + \frac{9}{4}\psi(1, 1) = 14 - 18 + 9 = 5$$

Ainsi $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X - \dfrac{3}{2})$.

— On a

$$P_2 = \frac{X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1}{\psi(X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1, X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1)}$$

Or $\psi(X^2, P_0) = \dfrac{1}{2}\psi(X^2, 1) = 7$ et

$$\psi(X^2, P_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\psi(X^2, X) - \frac{3}{2}\psi(X^2, 1)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(36 - 21) = \frac{15}{\sqrt{5}}$$

Ainsi

$$X^2 - \psi(X^2, P_0)P_0 - \psi(X^2, P_1)P_1 = X^2 - \frac{7}{2} - \frac{15}{5}\left(X - \frac{3}{2}\right) = X^2 - 3X + 1$$

Puis

$$\begin{aligned}
\psi(X^2 - 3X + 1, X^2 - 3X + 1) &= \psi(X^2 - 3X + 1, X^2) - 3\psi(X^2 - 3X + 1, X) + \psi(X^2 - 3X + 1, 1) \\
&= \psi(X^2, X^2) - 6\psi(X, X^2) + 2\psi(1, X^2) + 9\psi(X, X) - 6\psi(1, X) + \psi(1, 1) \\
&= 98 - 216 + 28 + 126 - 36 + 4 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ainsi $P_2 = \dfrac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)$.

Finalement on a

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{2}, \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2}), \qquad P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 1)}$$

3. (a) Deux méthodes sont possibles :

— Poser $R(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ et résoudre le système : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c + d = 3 \\ a + 2b + 4c + 8d = 2 \\ a + 3b + 9c + 27d = 3 \end{cases}$

Ce système a une unique solution : $\left(1, \dfrac{31}{6}, -4, \dfrac{5}{6}\right)$.

— Utiliser l'interpolation de Lagrange :

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2), P(3)) \end{array}$ est linéaire. Elle est injective, car si $P \in \mathrm{Ker}(f)$, alors P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ayant plus de 4 racines, c'est donc le polynôme nul.

Les espaces de départ et d'arrivée ayant même dimension, f est bijective. Ainsi $(1, 3, 2, 3)$ admet un unique antécédent R par f.

Si on veut une expression explicite de R, il s'agit du polynôme d'interpolation de Lagrange suivant

$$\begin{aligned}R(X) &= \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{-6} + 3\frac{X(X-2)(X-3)}{2} \\ &\quad + 2\frac{X(X-1)(X-3)}{-2} + 3\frac{X(X-1)(X-2)}{6} \\ &= \frac{6+31X-24X^2+5X^3}{6}\end{aligned}$$

Comme on n'a pas besoin de l'expression explicite de R pour la suite la seconde méthode est ici plus rapide.

(b) (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormée de F d'après la question 2.(b).

Le projeté orthogonal de R sur F est alors :

$$p_F(R) = \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2$$

Or

$$\begin{aligned}\psi(R, P_0) &= R(0)P_0(0) + R(1)P_0(1) + R(2)P_0(2) + R(3)P_0(3) \\ &= P_0(0) + 3P_0(1) + 2P_0(2) + 3P_0(3) \\ &= \frac{1}{2}(1+3+2+1) \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\psi(R, P_1) &= P_1(0) + 3P_1(1) + 2P_1(2) + 3P_1(3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 \times \frac{-3}{2} + 3 \times \frac{-1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\psi(R, P_1) &= P_2(0) + 3P_2(1) + 2P_2(2) + 3P_2(3) \\ &= \frac{1}{2}(1-3-2+3) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}p_F(R) &= \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2 \\ &= \frac{9}{2}P_0 + \frac{\sqrt{5}}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{2}(X - \frac{3}{2}) - \frac{1}{4}(X^2 - 3X + 1) \\ &= \frac{5+5X-X^2}{4}\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\text{le projeté orthogonal de } R \text{ sur } F \text{ est } \dfrac{5+5X-X^2}{4}.}$

Polynômes de Lagrange

Bien que classiques on ne s'attend pas ici à ce que vous redonniez sans indication ou questions préliminaires les formules des polynômes d'interpolation de Lagrange. La valeur explicite de R n'est d'ailleurs pas demandé et ne servira pas par la suite.

(c) On observe que, pour $P \in F$,

$$\sum_{i=0}^{3}(x_i - P(i))^2 = \sum_{i=0}^{3}(R(i) - P(i))^2 = \psi(R-P, R-P)$$

Ainsi minimiser la somme $\sum_{i=0}^{3}(x_i - P(i))^2$, c'est exactement chercher la distance de R à F pour la norme euclidienne associée à ψ.

on sait que cette distance est est atteinte uniquement quand P est le projeté orthogonal de R sur F : $p_F(R)$

Ainsi $\boxed{\Sigma \text{ admet un unique minimum.}}$

D'après le théorème de Pythagore on a, comme $R = R - p_F(R) + p_F(R)$ et $p_F(R)$ et $R - p_F(R)$ sont orthogonaux, $\psi(R, R) = \psi(R - p_F(R), R - p_F(R)) + \psi(p_F(R), p_F(R))$.

Ainsi $\psi(R - p_F(R), R - p_F(R)) = \psi(R, R) - \psi(p_F(R), p_F(R))$.

De plus, comme la famille (P_0, P_1, P_2) est orthonormée et $p_F(R) = \psi(R, P_0)P_0 + \psi(R, P_1)P_1 + \psi(R, P_2)P_2$ alors, d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}
\psi(p_F(R), p_F(R)) &= \psi(R, P_0)^2 + \psi(R, P_1)^2 + \psi(R, P_2)^2 \\
&= \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{81 + 5 + 1}{4} \\
&= \frac{87}{4}
\end{aligned}$$

De plus $\psi(R, R) = 1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 = 23$

Ainsi

$$\psi(R - p_F(R), R - p_F(R)) = 23 - \frac{87}{4} = \frac{92 - 87}{4} = \frac{5}{4}$$

Finalement

$$\boxed{\min\left\{\sum_{i=0}^{3}(x_i - P(i))^2, P \in F\right\} = \frac{5}{4}}$$

Pythagore

On aurait pu se lancer directement dans les calculs. Une utilisation intelligente de Pythagore va toutefois nous simplifier la vie et nous faire gagner du temps.